ТЕОРИЯ РИСКА

лекции

Поспелова Ирина Игоревна

Свойства суммы случайных величин

Рассмотрим страховой портфель. Общая сумма, выплаченная страховой компанией по всем полисам равна сумме платежей, поэтому далее рассмотрим свойства

$$S_k = X_1 + \cdots + X_k.$$

Теорема 1 (центральная предельная теорема)

$E[S_k] = E[X_1] + \cdots + E[X_k]$.

Если $X_1, \dots, X_k$ независимы, то $Var[S_k] = Var[X_1] + \cdots + Var[X_k]$.

Если случайные величины $X_1, X_2, \dots$ независимы, имеют конечные математическое ожидание и дисперсию, то

$$\lim_{k \to \infty} \frac{S_k - E[S_k]}{\sqrt{Var[S_k]}} \sim N(0, 1)$$

Сходимость рассматривается в смысле сходимости по распределению, т.е. случайные величины $\frac{S_k - E[S_k]}{\sqrt{Var[S_k]}}$ имеют распределение, пределом которого является стандартное нормальное распределение.

Свойства суммы случайных величин

Определение 1. Производящая функция моментов случайной величины X $M_X(z) = E[e^{zX}]$ для всех z, для которых математическое ожидание существует. Производящая функция вероятностей $P_X(z) = E[z^X]$ для всех z, для которых математическое ожидание существует.

Заметим, что $M_X(z) = P_X(e^z)$ и $P_X(z) = M_X(\ln z)$

Обычно производящие функции моментов (п.ф.м.) используются для непрерывных случайных величин, а производящие функции вероятностей (п.ф.в.) – для дискретных. Эти функции используются для вычисления моментов и вероятностей. Кроме того, существует взаимно-однозначное соответствие между функцией распределения случайной величины и ее п.ф.м. и п.ф.в.

Теорема 2. Пусть $S_k = X_1 + \cdots + X_k$, $X_1, \dots, X_k$ независимы. Тогда

$$M_{S_k}(z) = \prod_{j=1}^{k} M_{X_j}(z) \quad \text{и} \quad P_{S_k}(z) = \prod_{j=1}^{k} P_{X_j}(z)$$

Доказательство. Так как математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению математического ожидания, то

$$M_{S_k}(z) = E\left[e^{zS_k}\right] = E\left[e^{z\,(X_1+\cdots+X_k)}\right] = \prod_{j=1}^{k} E[e^{zX_j}] = \prod_{j=1}^{k} M_{X_j}(z)$$

Пример 1

Покажем, что сумма независимых случайных величины, имеющих гамма-распределение с одним и тем же параметром θ, имеет гамма-распределение.

Производящая функция моментов случайной величины с гамма-распределением:

$$E\left[e^{zX}\right] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^{\alpha}} \int_{0}^{\infty} e^{zx} x^{\alpha-1} e^{-x/\theta} dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^{\alpha}} \int_{0}^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x\left(-z+\frac{1}{\theta}\right)} dx = \left\{y = x\left(-z+\frac{1}{\theta}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^{\alpha}} \int_{0}^{\infty} y^{\alpha-1} \left(-z+\frac{1}{\theta}\right)^{-\alpha} e^{-y} dy = \frac{\Gamma(\alpha)(-z+1/\theta)^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)\theta^{\alpha}} = \left(\frac{1}{1-\theta z}\right)^{\alpha}, \qquad z < 1/\theta$$

Пусть $X_j \sim Gamma\left(\alpha_j;\ \theta\right)$. Тогда

$$M_{S_k}(z) = \prod_{j=1}^{k} \left(\frac{1}{1-\theta z}\right)^{\alpha_j} = \left(\frac{1}{1-\theta z}\right)^{\alpha_1+\cdots+\alpha_k}$$

Получили производящую функцию моментов для $Gamma(\alpha_1 + \cdots + \alpha_k; \theta)$

Пример 2

Получим п.ф.м. и п.ф.в. для распределения Пуассона

$$P_X(z) = \sum_{x=0}^{\infty} z^x \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(z\lambda)^x}{x!} = e^{-\lambda} e^{z\lambda} = e^{\lambda(1-z)}$$

Производящая функция моментов

$$M_X(z) = P_X(e^z) = \exp(\lambda(e^z - 1))$$

Хвосты распределений

Хвостом распределения (более точно, правым хвостом) называется часть распределения, соответствующая большим значениям случайной величины.

Большие возможные оказывают наибольшее влияние на общие потери.

Случайные величины, у которых более высокие вероятности приписаны большим значениям, имеют более тяжелый хвост.

Вес хвоста может быть относительным понятием (модель А имеет более тяжелый хвост, чем модель В) или абсолютным (распределения классифицируются как имеющее тяжелый хвост).

В общем случае существование всех моментов свидетельствует об относительно легком правом хвосте.

У распределений с тяжелым хвостом интеграл, определяющий моменты, может расходиться. Отсутствие всех или части моментов говорит о тяжелом правом хвосте.

Применяются *разные способы* классификации распределений по степени тяжести хвоста

Хвосты распределений

Пример 3.

Покажем, что у гамма-распределения, в отличие от распределения Парето, существуют все моменты

Для гамма-распределения

$$\mu'_k = \int_0^\infty x^k \frac{x^{\alpha-1}e^{-x/\theta}}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha}dx = \left\{y = \frac{x}{\theta}\right\} = \int_0^\infty (y\theta)^k \frac{(y\theta)^{\alpha-1}e^{-y}}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha}\theta dx = \frac{\theta^k}{\Gamma(\alpha)}\Gamma(\alpha+k) < \infty \ \ \forall k$$

Для распределения Парето

$$\mu'_k = \int_0^\infty x^k \frac{\alpha\theta^\alpha}{(x+\theta)^{\alpha+1}}dx = \{y = x+\theta\} = \int_\theta^\infty (y-\theta)^k \frac{\alpha\theta^\alpha}{y^{\alpha+1}}dx = \alpha\theta^\alpha \int_\theta^\infty \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} y^{j-k-1}(-\theta)^{k-j}dy$$

интеграл сходится только если $\alpha + 1 - k > 1$, т.е. $k < \alpha$

Согласно этой классификации, распределение Парето имеет тяжелый хвост, а гамма-распределение имеет легкий хвост.

Заметим, что если распределение не имеет всех своих положительных моментов, то у него нет п.ф.м. (т.е. $E\left[e^{zX}\right] = \infty$ для всех $z > 0$). Однако обратное неверно. Логнормальное распределение не имеет п.ф.м., несмотря на то, что все его положительные моменты конечны.

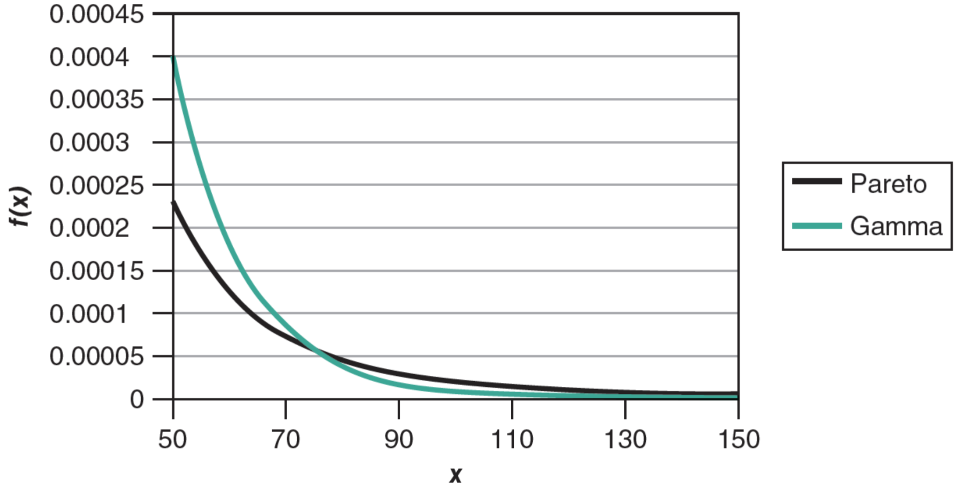
Предельное соотношение хвостов

Широко используемый признак того, что одно распределение имеет более тяжелый хвост, чем другое с тем же средним значением, состоит в том, что отношение двух функций выживания (с распределением с более тяжелым хвостом в числителе) стремится к бесконечности.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{S_1(x)}{S_2(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{S'_1(x)}{S'_2(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{-f_1(x)}{-f_2(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

Это значит, что распределение в числителе приписывает заметно большие значения вероятностей большим значениям x.

Пример 4



Покажем, что хвост распределения Парето тяжелее хвоста гамма-распределения, используя предел отношения функций плотности.

(параметры τ и λ используются вместо α и θ в гамма-распределении).

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f_{Pareto}(x)}{f_{gamma}(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\alpha\theta^{\alpha}(x+\theta)^{-\alpha-1}}{x^{\tau-1}e^{-\frac{x}{\lambda}}\lambda^{-\tau}\Gamma^{-1}(\tau)} = \frac{\alpha\theta^{\alpha}}{\lambda^{-\tau}\Gamma^{-1}(\tau)}\lim_{x\to\infty}\frac{(x+\theta)^{-\alpha-1}}{x^{\tau-1}e^{-\frac{x}{\lambda}}}$$

$$= c\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{x}{\lambda}}}{x^{\tau-1}(x+\theta)^{\alpha+1}} > c\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{x}{\lambda}}}{(x+\theta)^{\alpha+\tau}} = \infty$$

На рисунке показаны функции плотности распределения Парето с параметрами α = 3 и θ = 10 и гамма распределения с параметрами α = 1/3 и θ = 15. Оба распределения имеют среднее 5 и дисперсию 75.

Использование уровня риска для оценки хвоста

- Уровень риска также содержит информацию о характере хвоста распределения. Распределения с **убывающим** (невозрастающим) уровнем риска имеют тяжелый хвост. Распределения с **возрастающим** (неубывающим) уровнем риска имеют легкие хвосты.
- Экспоненциальное распределение имеет постоянный уровень риска, поэтому он является и возрастающим, и убывающим.
- Для распределений с монотонным уровнем риска экспоненциальное распределение служит границей, разделяющие тяжелые и легкие хвосты.
- Сравнение распределений также делается на основе уровня риска. Например, распределение имеет более легкий хвост, если уровень риска возрастает быстрее. Часто такая классификация и сравнения производятся только в правой части распределения, т.е. только для больших значений.

Пример 5

Сравним хвосты распределения Парето и гамма распределения с точки зрения уровня риска.

Распределение Парето: $h(x) = \frac{f(x)}{S(x)} = \frac{\alpha\theta^{\alpha}(x+\theta)^{-\alpha-1}}{\theta^{\alpha}(x+\theta)^{-\alpha}} = \frac{\alpha}{x+\theta}$ - убывает

Для гамма-распределения расчет оказывается сложнее.

Заметим, что $\frac{1}{h(x)} = \frac{\int_x^{\infty} f(t)dt}{f(x)} = \frac{\int_0^{\infty} f(x+y)dy}{f(x)}$

Поэтому, если $\frac{f(x+y)}{f(x)}$ возрастает по x для любого фиксированного y, то $\frac{1}{h(x)}$ тоже возрастает, и $h(x)$ убывает.

Для гамма распределения

$$\frac{f(x+y)}{f(x)} = \frac{(x+y)^{\alpha-1}e^{-(x+y)/\theta}}{x^{\alpha-1}e^{-x/\theta}} = \left(1+\frac{y}{x}\right)^{\alpha-1} e^{-y/\theta}$$

строго возрастает по x при $\alpha < 1$ и строго убывает по x при $\alpha > 1$. По этому критерию гамма распределения с $\alpha < 1$ имеют тяжелый хвост, гамма-распределения с $\alpha > 1$ имеют легкий хвост. Заметим, что $\alpha = 1$ дает экспоненциальное распределение и постоянный уровень риска.

Пример 5

Несмотря на сложный вид уровня риска, используя правило Лопиталя, нетрудно определить его поведение на бесконечности:

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{S(x)} = -\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{f(x)} = -\lim_{x\to\infty}\left[\frac{d}{dx}\ln f(x)\right] = -\lim_{x\to\infty}\frac{d}{dx}\left[(\alpha-1)\ln x - \frac{x}{\theta}\right] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\theta}-\frac{\alpha-1}{x}\right)$$
$$= \frac{1}{\theta}$$

Использование среднего превышения для оценки тяжести хвоста

Среднее превышение ущерба также дает информацию о тяжести хвоста.

Если среднее превышение ущерба возрастает по d, распределение имеет тяжелый хвост. Если среднее превышение ущерба убывает по d, распределение имеет легкий хвост. Сравнение распределений осуществляется на основе того, является ли среднее превышение возрастающим или убывающим.

Действительно, среднее превышение и уровень риска связаны. Заметим, что

$$\frac{S(y+d)}{S(d)} = \frac{\exp\left[-\int_0^{y+d} h(x)dx\right]}{\exp\left[-\int_0^{d} h(x)dx\right]} = \exp\left[-\int_d^{y+d} h(x)dx\right] = \exp\left[-\int_0^{y} h(d+t)dt\right]$$

Поэтому, если уровень риска убывает, то для фиксированного y $\int_0^y h(d+t)dt$ также убывает по d, значит, $\frac{S(y+d)}{S(d)}$ также убывающая функция d.

Использование среднего превышения для оценки тяжести хвоста

Среднее превышение ущерба можно представить в виде

$$e(d) = \frac{\int_d^\infty S(x)dx}{S(d)} = \int_0^\infty \frac{S(y+d)}{S(d)} dy$$

Таким образом, если уровень риска убывает, то среднее превышение ущерба $e(d)$ возрастает по d.
И наоборот, если уровень риска возрастает, то среднее превышение является убывающей функцией.
Следует отметить, однако, что обратное неверно.

Другое соотношение между средним превышением ущерба и уровнем риска. При $d \to \infty$, $S(d)$ и $\int_d^\infty S(x)dx$ стремятся к 0. Поэтому, применяя правило Лопиталя, получаем

$$\lim_{d\to\infty} e(d) = \lim_{d\to\infty} \frac{\int_d^\infty S(x)dx}{S(d)} = \lim_{d\to\infty} \frac{-S(d)}{-f(d)} = \lim_{d\to\infty} \frac{1}{h(d)}$$

Это предельное соотношение используется в случае, когда вид $F(x)$ достаточно сложный

Пример 6

Изучим поведение среднего превышения гамма-распределения.

Так как

$$e(d) = \frac{\int_d^\infty S(x)dx}{S(d)},$$

$S(d)$ имеет сложный вид, то и $e(d)$ имеет сложный вид. Однако

$$e(0) = \frac{\int_0^\infty [x-0]_+ f(x)\,dx}{1-F(0)} = E[X] = \alpha\theta.$$

Из предыдущего примера (пример 5): $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = \frac{1}{\theta}$

Но $\lim\limits_{d\to\infty} e(d) = \lim\limits_{d\to\infty} \frac{1}{h(d)} = \theta.$

Так как $h(x)$ строго убывает по x при $\alpha < 1$ и строго возрастает при $\alpha > 1$, получаем, что $e(d)$ строго возрастает от $\alpha\theta$ до θ для $\alpha < 1$ и строго убывает от $\alpha\theta$ до θ при $\alpha > 1$. Для $\alpha = 1$ получаем экспоненциальное распределение с $e(d) = \theta$.

Равновесные распределения

- Рассмотрим равновесные распределения (интегрированное хвостовое распределение). Для положительной случайной величины с $S(0) = 1$ при $d = 0$ $E[X] = \int_0^\infty S(x)dx$, т.е. $1 = \int_0^\infty \frac{S(x)}{E[X]} dx$. Значит, $f_e(x) = \frac{S(x)}{E[X]}$ является плотностью распределения.
- Соответствующая функция выживания равна

$$S_e(x) = \int_x^\infty f_e(t)dt = \frac{\int_x^\infty S(t)dt}{E]X]}, \qquad x \geq 0$$

- Уровень риска, соответствующий равновесному распределению

$$h_e(x) = \frac{f_e(x)}{S_e(x)} = \frac{S(x)}{\int_x^\infty S(t)dt} = \frac{1}{e(x)}$$

- Таким образом, величина, обратная к среднему превышению, является уровнем риска. Этот факт можно использовать, чтобы показать что функция среднего превышения ущерба однозначно характеризует исходное распределение.

Равновесные распределения

- Заметим, что

$$f_e(x) = h_e(x)S_e(x) = h_e(x)\exp(-\int_0^x h_e(t)dt)$$

или, что то же самое,

$$S(x) = \frac{e(0)}{e(x)}\exp(-\int_0^x \frac{1}{e(t)}dt),$$

так как $e(0) = E[X]$.

- Равновесное распределение позволяет получить и другие соотношения между уровнем риска, средним превышением и тяжестью хвоста. Предполагая, что $S(0) = 1$ и, значит, $e(0) = E[X]$, получаем $\int_x^\infty S(t)dt = e(0)S_e(x)$. С другой стороны, $\int_x^\infty S(t)dt = e(x)S(x)$. Значит,

$$\frac{e(x)}{e(0)} = \frac{S_e(x)}{S(x)}$$

Равновесные распределения

- Если среднее превышение возрастает (т.е. уровень риска убывает), то $e(x) \geq e(0)$, значит,

$$S_e(x) \geq S(x) \Longrightarrow \int_0^\infty S_e(x)dx \geq \int_0^\infty S(x)dx$$

- Но $E[X] = \int_0^\infty S(x)dx$ и также

$$\int_0^\infty S_e(x)dx = \int_0^\infty xf_e(x)dx = \frac{1}{E[X]}\int_0^\infty xS(x)dx = \{\text{по частям}\} = \frac{E[X^2]}{2E[X]}$$

- Значит, $\frac{E[X^2]}{2E[X]} \geq E[X]$ или $Var[X] \geq E^2[X]$

- Это значит, что квадрат коэффициента вариации и сам коэффициент вариации не менее 1, если $e(x) \geq e(0)$. Обратное неравенство приводит к верхней границе 1 для коэффициента вариации при $e(x) \leq e(0)$, что получается, если среднее превышение убывает или уровень риска возрастает. Таким образом, значение коэффициента вариации оказывается также связано с тяжестью хвоста.

Меры риска

Вероятностные модели обеспечивают возможность описать подверженность риску. Уровень подверженности риску часть описывает одним числом или небольшим множеством чисел. Эти числа часто называются ключевыми индикаторами риска. Такие ключевые индикаторы информируют актуариев и других риск-менеджеров о степени, в которой компания подвержена определенным типам риска. В частности, VaR (Value at Risk, величина риска, стоимость под риском, денежная оценка риска) является квантилью распределения суммарных убытков. Риск-менеджеры имеют возможность учесть вероятность неблагоприятного исхода. Это может быть выражено посредством VaR для определенного уровня вероятности. VaR может быть использован для определения количества капитала, требующегося для того, чтобы противостоять неблагоприятным исходам.

VaR имеет определенные недостатки. Более информативной и более полезной мерой риска является TVaR(Tail Value at Risk, хвостовое значение риска). Оно появилось независимо во множестве областей и имеет различные названия, в том числе Conditional Value at Risk (CVaR), Average Value at Risk (AVaR), Conditional Tail Expectation (CTE) и Expected Shortfall (ES).

Согласованность меры риска

Мера риска является отображением множества случайных величины, представляющих убытки, ассоциированные с риском, на числовую прямую (множество действительных чисел).

Мера риска дает одно число, которое предназначено для количественной оценки подверженности риску. Например, стандартное отклонение или число, кратное стандартному отклонению, является мерой риска, так как обеспечивает оценку неопределенности. Это особенно хорошо подходит для стандартного нормального распределения. В финансовой сфере размер убытка, для которого вероятность превышения мала (например, 0.05%), является простой мерой риска.

Меры риска обозначаются через $\rho(X)$. Удобно рассматривать $\rho(X)$ как количество активов, требующихся для защиты от неблагоприятного исхода риска X.

Комбинирование рисков важно в изучении потребности в капитале страховой компании, когда рассматривается совокупная подверженности риску. Страховая компания может иметь разные страховые продукты, например, личное страхование жизни, страхование домовладельцев, автомобилей, групповое страхование жизни и здоровья. Когда меры риска применяются к отдельным типам страхования результат должен в некотором смысле соответствовать тому, что получается, когда мера риска применяется ко всей компании.

Далее будем рассматривать переменные X и Y в качестве переменных убытка для двух подразделений и $X + Y$ как случайную величину потерь для организации, образованной этими двумя подразделениями.

Условия согласованности

Будем считать, что если X и Y являются элементами множества, то cX и $X + Y$ также принадлежат этому множеству. Это исключает риски, измеряемые в процентах, как в Модели 1

Определение 2. Мера риска $\rho(X)$ называется согласованной, если для двух случайных величин X и Y, отвечающих потерям, выполнены следующие свойства:

1. полуаддитивность: $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$:
2. монотонность: если $X \leq Y$ для всех возможных исходов, то $\rho(X) \leq \rho(Y)$.
3. положительная однородность: для любого $c > 0, \rho(cX) = c\rho(X)$.
4. трансляционная инвариантность: для любой константы $\rho(X + c) = \rho(X) + c$.

- Полуаддитивность означает, что мера риска (и, значит, капитал, требуемый для его поддержки) для комбинации двух рисков не больше суммы мер каждого риска в отдельности. Она отражает тот факт, что от комбинирования рисков должно быть какое-то преимущество. Иначе компании будут иметь преимущества дезагрегации в более мелкие.
- Монотонность означает, что если один риск всегда приводит к большим потерям, чем другой, то и мера риска в первом случае должна быть больше.
- Положительная однородность означает, что мера риска не зависит от единицы измерения (валюты). Или, эквивалентно, удвоение подверженности риск требует удвоения капитала. Это разумно, так как удвоение не обеспечивает диверсификации.
- Трансляционная инвариантность означает, что добавления риска нет там, где не добавочной неопределенности. В частности, при $X = 0$, величина активов требующихся для определенного дохода, в точности равна величине этого дохода.

Существует большое число мер риска, удовлетворяющих условиям согласованности

Пример 7

Принцип стандартного отклонения. Стандартное отклонение является мерой неопределенности распределения. Рассмотрим распределение убытков со средним μ и стандартным отклонением σ.

Величина $\mu + k\sigma$, где k - константа, является мерой риска (часто называемой принципом стандартного отклонения). Коэффициент k обычно выбирается для обеспечения того, чтобы убытки превысили меру риска для какого-то распределения, например нормального, с заданной малой вероятностью.

Принцип стандартного отклонения не является согласованным – не удовлетворяет п. 2 (упр. 11).

Если X имеет нормальное распределение, значение k = 1.645 приводит к превышению вероятности $\mathrm{P}\{X > \mu + k\sigma\} = 5\%$, тогда как при $k = 2.576$ $\mathrm{P}\{X > \mu + k\sigma\} = 0.5\%$.

Однако если распределение не является нормальным, те же множители стандартного отклонения приведут к другим вероятностям превышения. Можно также начать с вероятности превышения, получив квантиль для $\mu + k\sigma$ и эквивалентное значение k. В этом состоит главная идея Value at Risk.

Value at Risk

- Value at Risk (VaR) – стоимость под риском, стоимостная оценка риска. Это количество капитала, требующееся для обеспечения, с высокой степенью уверенности, того, что предприятие избежит технического разорения. Степень уверенности выбирается произвольно.
- На практике она может быть большим числом, например 99.95% для всего предприятия, но она может быть заметно меньше, например, 95%, для отдельных единиц риска или классов риска внутри предприятия. Этот низкий процент может отражать существующую диверсификацию по типу риска.
- Предположим, что $F_X(x)$ представляет распределение исходов в фиксированный период времени, например год, для портфеля рисков (таких как множество страховых рисков или всей компании. Нежелательный исход называется «убытком».
- VaR для случайной величины X - это $100p$ процентиль распределения X, обозначаемая через
$$VaR_p[\mathrm{X}] = \pi_p$$
- Отсюда ясно, почему VaR часто называют квантильной мерой риска. Когда страховой компании доступно такое количество капитала, то он может предотвратить 100p% возможных исходов убытков.

Value at Risk

- Когда величина 99.95% установлена на однолетний период, это можно интерпретировать так, что что есть только очень маленький шанс (0.05%), что страховая компания обанкротится в результате неблагоприятного исхода в течение следующего года.
- **Определение 3.** Пусть X обозначает случайную величину ущерба. **Value at Risk** величины X на уровне $100p\%$ обозначаемая через $VaR_p[\mathrm{X}]$ или π_p, является $100p$ процентилью распределения X:

$$VaR_p[\mathrm{X}] = \inf_{x \geq 0}(x | F_X(x) \geq p), 0 < p < 1.$$

- Таким образом, $F_X\left(VaR_p[X]\right) \geq p$. Равенство выполняется если X непрерывная. Для непрерывных распределений можно просто написать $VaR_p[\mathrm{X}]$ для X как величину π_p, удовлетворяющую

$$P\{X > \pi_p\} = 1 - p$$

- Хорошо известно, что VaR не удовлетворяет одному из условий согласованности - полуаддитивности. Невыполнение требования полуаддитивности VaR показывает следующий пример

Пример 8

Пусть Z - случайная величину убытка, являющуюся непрерывной со следующими значениями функции распределения:

$$F_Z(1) = 0.91, \qquad F_Z(90) = 0.95, \qquad F_Z(100) = 0.96$$

95% квантиль, т.е. $VaR_p[Z] = 90$, так как есть вероятность 5% превышения 90. Предположим, что риск Z будет разделен на два зависимых риска X и Y так, что они в сумме полностью эквивалентны Z, т.е. $X + Y = Z$.

один из вариантов такой:

$$X = \begin{cases} Z, Z \leq 100 \\ 0, Z > 100 \end{cases}, \qquad Y = \begin{cases} 0, Z \leq 100 \\ Z, Z > 100 \end{cases}$$

- Тогда функция распределения X удовлетворяет $F_X(1) = 0.95$, $F_X(90) = 0.99$, $F_X(100) = 1$, поэтому $Var_{0.95}$[X]=1.
- Аналогично, функция распределения для риска Y удовлетворяет $F_Y(0)$=0.96, показывая, что есть 96% вероятность отсутствия убытка. Таким образом, 95% квантиль не превышает 0 и $VaR_{0.95}(Y) \leq 0$. Следовательно сумма 95% квантили X и Y меньше $VaR_{0.95}[Z]$, что доказывает отсутствие полуаддитивности.

Tail Value at Risk

- VaR широко распространен в финансовом риск менеджменте трейдинговых рисков на фиксированном (обычно довольно коротком) периоде. В таком случае нормальное распределение часто используется для описания выигрышей и убытков. Если распределения доходов и убытков ограничено нормальным распределением, VaR удовлетворяет условиям согласованности.
- Однако нормальное распределение обычно не используется для описания страховых рисков, которые, как правило, являются асимметричными. Поэтому использование VaR затруднено из-за отсутствия полуаддитивности.
- **Определение 4.** Пусть X обозначает случайную величину убытка. **Tail Value at Risk** (хвостовое значение риска) X на уровне защиты 100p%, обозначаемое через $TVaR_p[X]$, равно среднему по всем значениям VaR выше уровня $p, 0 < p < 1$, т.е.

$$TVaR_p[X] = \frac{\int_p^1 VaR_u[X]du}{1-p}$$

Tail Value at Risk

TVaR является согласованной мерой риска. Альтернативная формула выглядит следующим образом:

$$TVaR_p[X] = VaR_p[X] + \frac{1 - F_X(VaR_p[X])}{1 - p}\{E[X|X > VaR_p[X]] - VaR_p[X]\}.$$

Если X непрерывна в $VaR_p[X]$, то $F_X(VaR_p[X]) = p$, и формула упрощается:

$$TVaR_p[X] = E[X|X > VaR_p[X]].$$

Более того, в этом случае

$$TVaR_p[X] = E[X|X > \pi_p] = \pi_p + E[X - \pi_p|X > \pi_p] = VaR_p[X] + e(\pi_p),$$

где $e(\pi_p)$ - функция среднего превышения ущерба, вычисленная в $100p$ процентили. Таким образом, TVaR больше соответствующего VaR на величину среднего превышения всех убытков, которые превышают VaR.

Далее, в силу того, что $\pi_p = VaR_p[X]$, $TVaR_p[X]$ выражается как функция $VaR_p[X]$,

VaR рассматривается как мера типа «все или ничего» в том смысле, что если происходит экстремальное событие в превышении порога VaR, то нет капитала, чтобы компенсировать убытки. Также VaR квантиль в TVaR определяет «плохие времена», т.е. ситуации, когда убытки превышают порог VaR. Тогда TVaR обеспечивает среднее превышение убытков в «плохие времена», т.е. когда порог VaR для «плохих времен» превышен

Пример 9

Рассмотрим нормальное распределение со средним μ и стандартным отклонением σ,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

Пусть $\Phi(x)$ и $\phi(x)$ - функция и плотность распределения стандартного нормального распределения ($\mu = 0, \sigma = 1$). Тогда

$$VaR_p[X] = \mu + \sigma\Phi^{-1}(p)$$

$$TVaR_p[X] = \mu + \sigma\frac{\phi(\Phi^{-1}(p))}{1-p}$$

Заметим, что в обоих случаях меры риска могут быть представлены в виде принципа стандартного отклонения при подходящем выборе k

Пример 10

Экспоненциальное распределение.

$$f(x) = \frac{1}{\theta}\exp\left(-\frac{x}{\theta}\right), x > 0$$

Тогда

$$VaR_p[X] = -\theta\ln(1-p)$$
$$TVaR_p[X] = VaR_p[X] + \theta$$

Превышение TVaR над VaR равно константе θ для всех значений p, в силу свойства отсутствия памяти экспоненциального распределение.

Пример 11

Распределение Парето $(\theta, \alpha > 1)$.

$$F(x) = 1 - \left(\frac{\theta}{x+\theta}\right)^{\alpha}, x > 0.$$

Тогда

$$VaR_p[X] = \theta\left((1-p)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1\right)$$

$$TVaR_p[X] = VaR_p[X] + \frac{VaR_p[X] + \theta}{\alpha - 1}$$

Превышение TVaR над VaR линейно возрастает по VaR. Это значит, что больший VaR приводит к большему среднему превышению ущерба над VaR свидетельствующее о более «рискованном» распределении.

Пример 12:сравнение хвостов

TVaR одна из многих возможных мер риска. Она хорошо подходит для страховых приложений, в которых может понадобиться отразить в каком-то виде форму хвоста за пороговым значением VaR. TVaR представляет эту форму через среднее превышение ущерба или ожидаемый недостаток.

Рассмотрим три распределения ущерба страховой компании. Убытки для следующего года оценены в размере 100 миллионов со стандартным отклонением 223.607 миллионов. Нас интересуют высокие значения квантилей распределения ущерба. Рассмотрим распределения: нормальное, Парето и Вейбулла и найдем VaR для уровней безопасности 90%, 99% и 99.9%.

Исходя из значений среднего и стандартного отклонения, найдем параметры распределений:

Normal(100, 223.607), Pareto(150, 2.5), Weibull(50, 0.5). В таблице показаны значения квантилей $\pi_{0.9}, \pi_{0.99}, \pi_{0.999}$

Уровень безопасности	Normal	Pareto	Weibull
0.9	386.6	226.78	265.09
0.99	620.19	796.44	1060.38
0.999	791	2227.34	2385.85

Пример 12:сравнение хвостов

Из примера видно, что результаты могут сильно различаться в зависимости от выбора распределения.

Нормальное распределение имеет более легкий хвост, чем другие. Следовательно, вероятности экстремальных исходов относительно невелики, что приводит к меньшим значениям.

Распределение Парето и распределение Вейбулла с $\tau < 1$ имеют тяжелые хвосты и, следовательно, относительно большие экстремальные квантили. Пример также показывает, что знание только среднего значения и стандартного отклонения недостаточно для оценки экстремальных квантилей, необходимых для определения требований к капиталу.

Вычисление TVaR

- На практике получение численных значений VaR или TVaR может быть сделано непосредственно на основе данных или из формул распределений. При оценке VaR на основе данных могут быть использованы методы получения квантилей на основе эмпирических распределений.
- Так как TVaR является ожидаемым значением наблюдений, которые больше заданного порога, естественной будет оценка среднего значения наблюдений, превышающих порог. Однако следует предостеречь от использования этого подхода на практике до тех пор, пока не получено достаточно большое число наблюдений, превышающих пороговое значение.
- В случаях, когда нет достаточного числа наблюдений, предпочтительнее получить модель распределения по всем наблюдениям или хотя бы по всем наблюдениям, превышающим относительно низкий порог.

Вычисление TVaR

Используя следующее соотношение, можно вычислить значения VaR и TVaR непосредственно из подходящего распределения.

$$TVaR_p[X] = E\left[X \middle| X > \pi_p\right] = \pi_p + \frac{\int_{\pi_p}^{\infty}(x - \pi_p)f(x)dx}{1-p}$$

$$= \pi_p + \frac{\int_{-\infty}^{\infty}(x - \pi_p)f(x)dx - \int_{-\infty}^{\pi_p}(x - \pi_p)f(x)dx}{1-p} =$$

$$\pi_p + \frac{E[X] - \int_{-\infty}^{\pi_p} xf(x)dx - \pi_p\left(1 - F(\pi_p)\right)}{1-p} =$$

$$\pi_p + \frac{E[X] - E[\min(X, \pi_p)]}{1-p} = \pi_p + \frac{E[X] - E[X \wedge \pi_p]}{1-p}$$

Пример 13

Используя полученную формулу, получим TVaR для уровня безопасности 99.9% для распределения Парето Pareto(150, 2.5).

Из примера 11 $\pi_p = VaR_p[X] = \theta\left((1-p)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1\right) = 150\left((1-0.999)^{-\frac{1}{2.5}} - 1\right) = 2227.34$

$$E[X] = \frac{\theta}{\alpha - 1} = \frac{150}{1.5} = 100$$

$$E\left[X \wedge \pi_p\right] = \frac{\theta}{\alpha - 1}\left(1 - \left(\frac{\theta}{\pi_p + \theta}\right)^{\alpha - 1}\right) = 100\left(1 - \left(\frac{150}{2227.34 + 150}\right)^{1.5}\right) = 98.4151$$

$$TVaR_p[X] = \pi_p + \frac{E[X] - E[X \wedge \pi_p]}{1 - p} = 2227.34 + \frac{100 - 98.4151}{0.001} = 3812.23$$